

Бутерброд та теорема Больцано-Коші

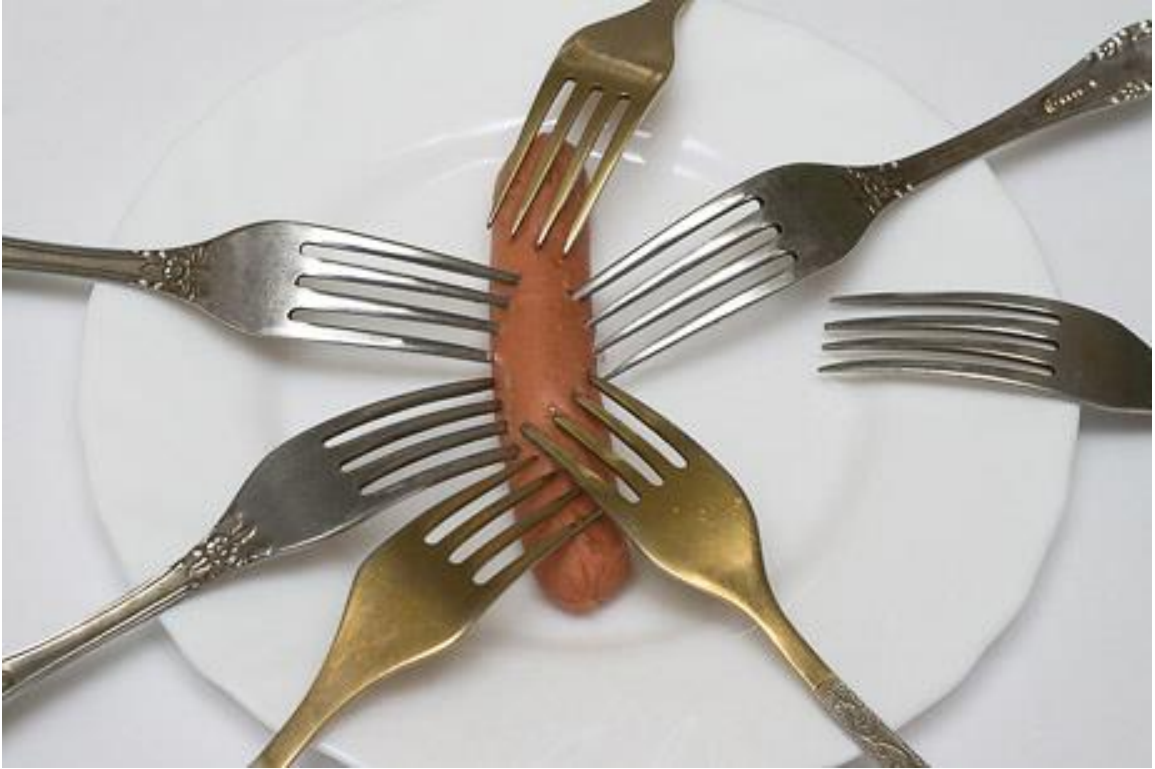


Фото: kyivvlada.com.ua

Українська студентська їдальня застійних часів. Студент робить замовлення:

– Дві сосиски.

Кухар:

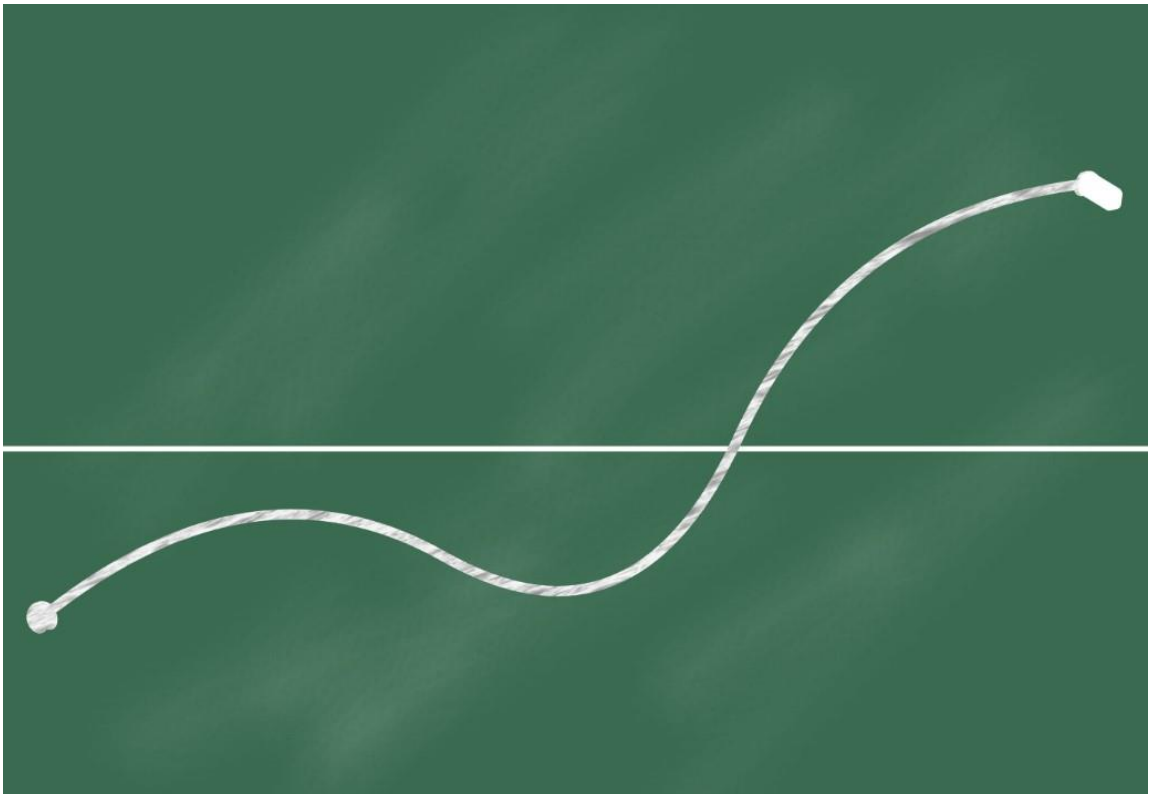
– О, шикуюєш!

– І шістнадцять виделок...

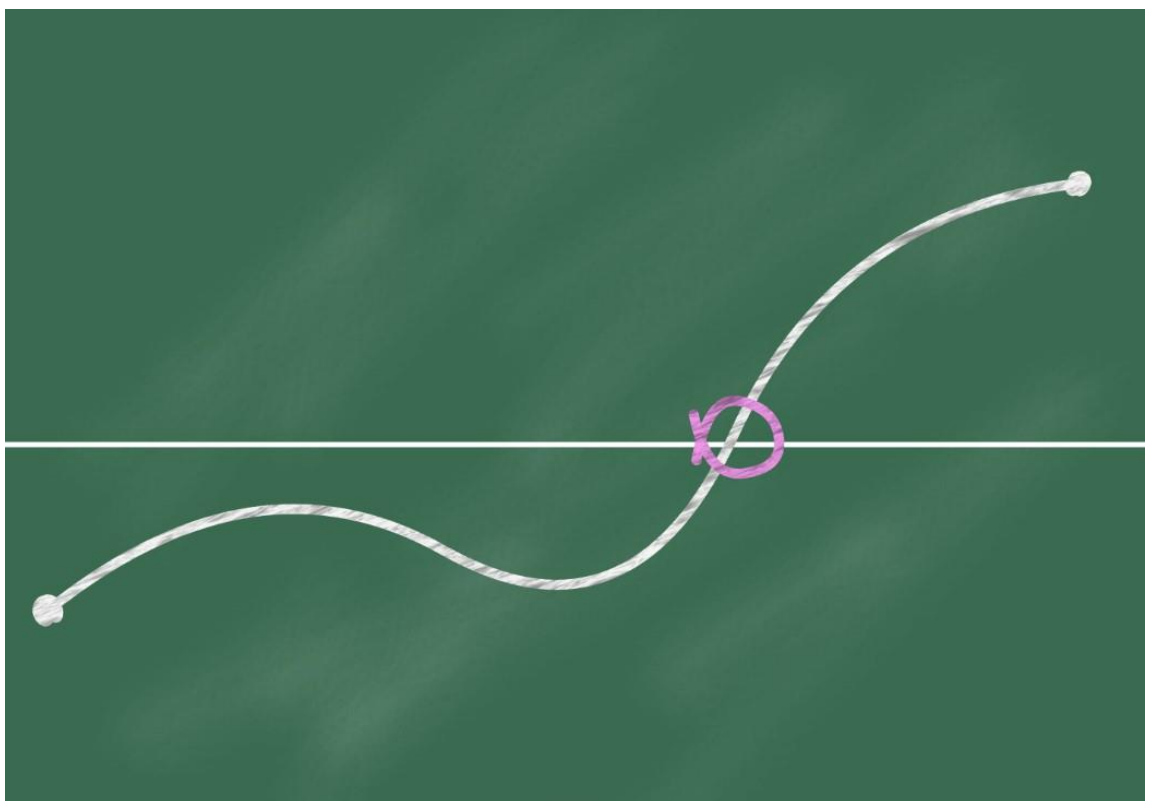
Багато чого змінилось із тих часів, окрім «голоду» до знань у справжніх студентів. Є сподівання, що в студентів Бердянського державного педагогічного університету так само присутня жага до знань!

Ближче до теми. Що ж спільного між розрізанням сосиски чи бутерброду та теоремою **Больцано-Коші** про проміжне значення? Правильна відповідь – **концепція неперервності**.

На дошці відмічені дві точки по різні боки від прямої: одна нижче, а інша вище за пряму. З'єднаємо їх неперервною лінією (не відриваючи крейди від дошки). Тоді в якійсь точці (може бути, не одній, в залежності від шляху крейди по дошці) наша лінія перетне пряму.



Незважаючи на очевидність, це твердження є теоремою Больцано-Коші, яка каже: якщо **неперервна** функція на кінцях проміжку приймає значення різних знаків, то на цьому проміжку вона **пройде через нуль**.
Узагальнене формулювання: якщо неперервна функція приймає значення на обох кінцях проміжку, вона також прийме значення на відрізьку між ними.

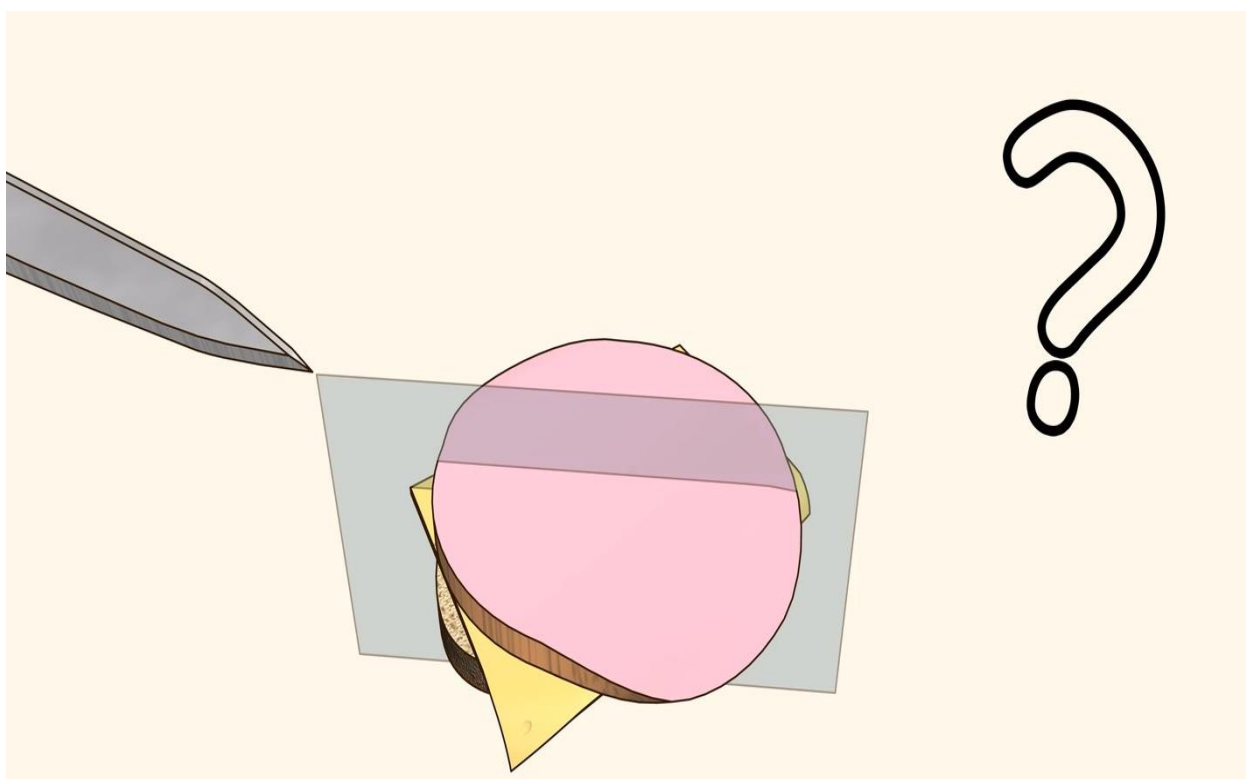


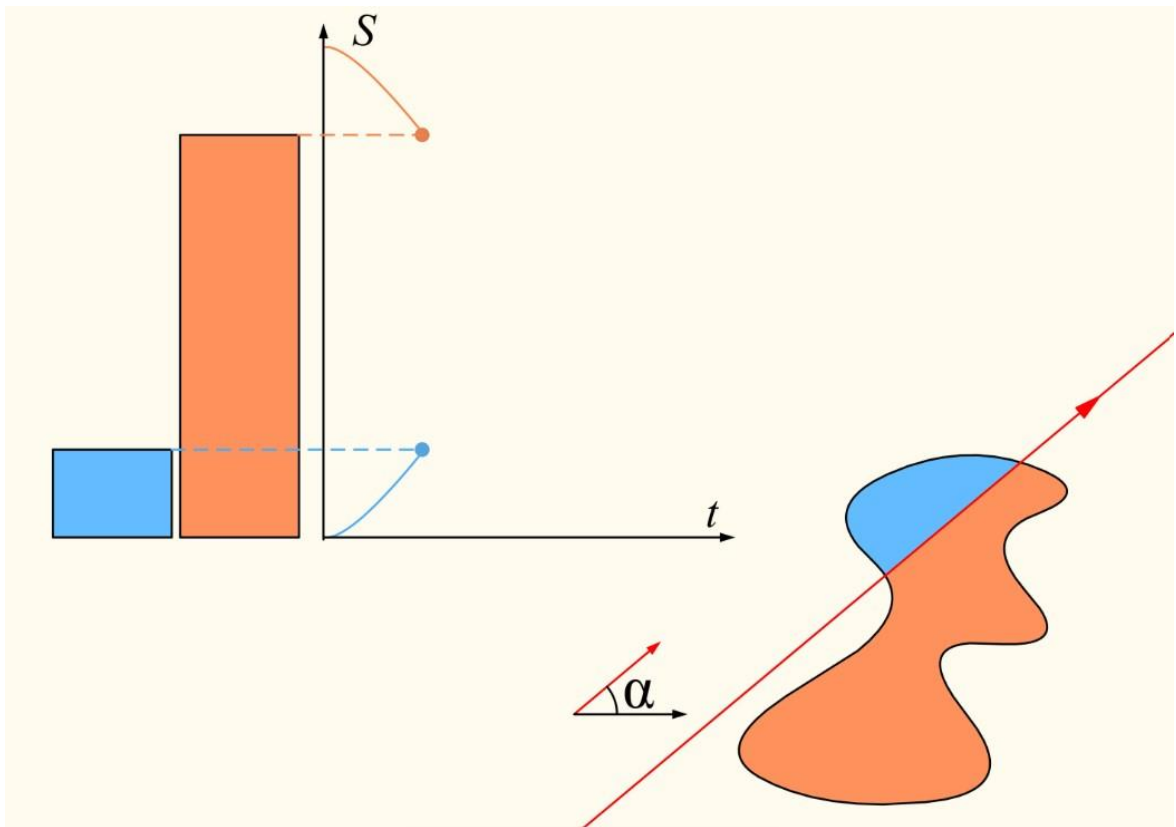
Якби лінія могла бути перервною (дозволялося б відривати крейду від дошки), то, звичайно, можна було б перескочити знизу вгору, не перетинаючи пряму. Якби розглядався не перетин з прямою (безліч усіх дійсних чисел), а, наприклад, перетин з безліччю тільки раціональних чисел, то знову ж таки – перетину могло б і не бути.

Найдивовижніше, що це, здавалося б, дитяче спостереження є дуже потужним засобом, який використовується у доказі деяких математичних тверджень. Але теорема Больцано-Коші також має один недолік – неконструктивність: лінія десь обов'язково перетне пряму, але в якій саме точці – сказати неможливо без додаткових умов.

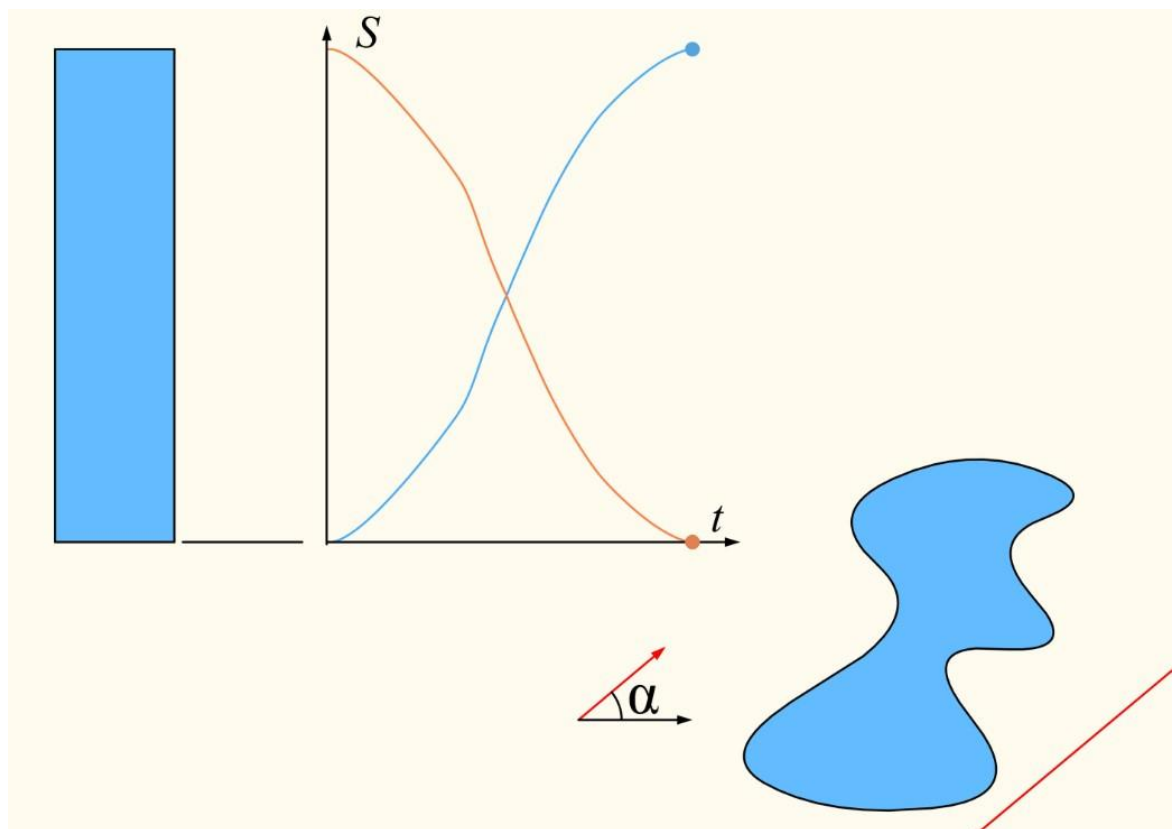
Отже, з теоремою Больцано-Коші ознайомились, далі перейдемо до задачі розрізання бутерброду.

Задача. Чи можна бутерброд, що складається із ковбаси, сиру та хліба, розрізати однією площиною так, щоб в обох частинах була однакова (за об'ємом) кількість ковбаси, а також однакова кількість сиру та хліба? Товщину складників можна для спрощення вважати різною, але рівномірною для кожного та додатково вказати на довільне розміщення шарів без дотримання тої чи іншої симетрії.

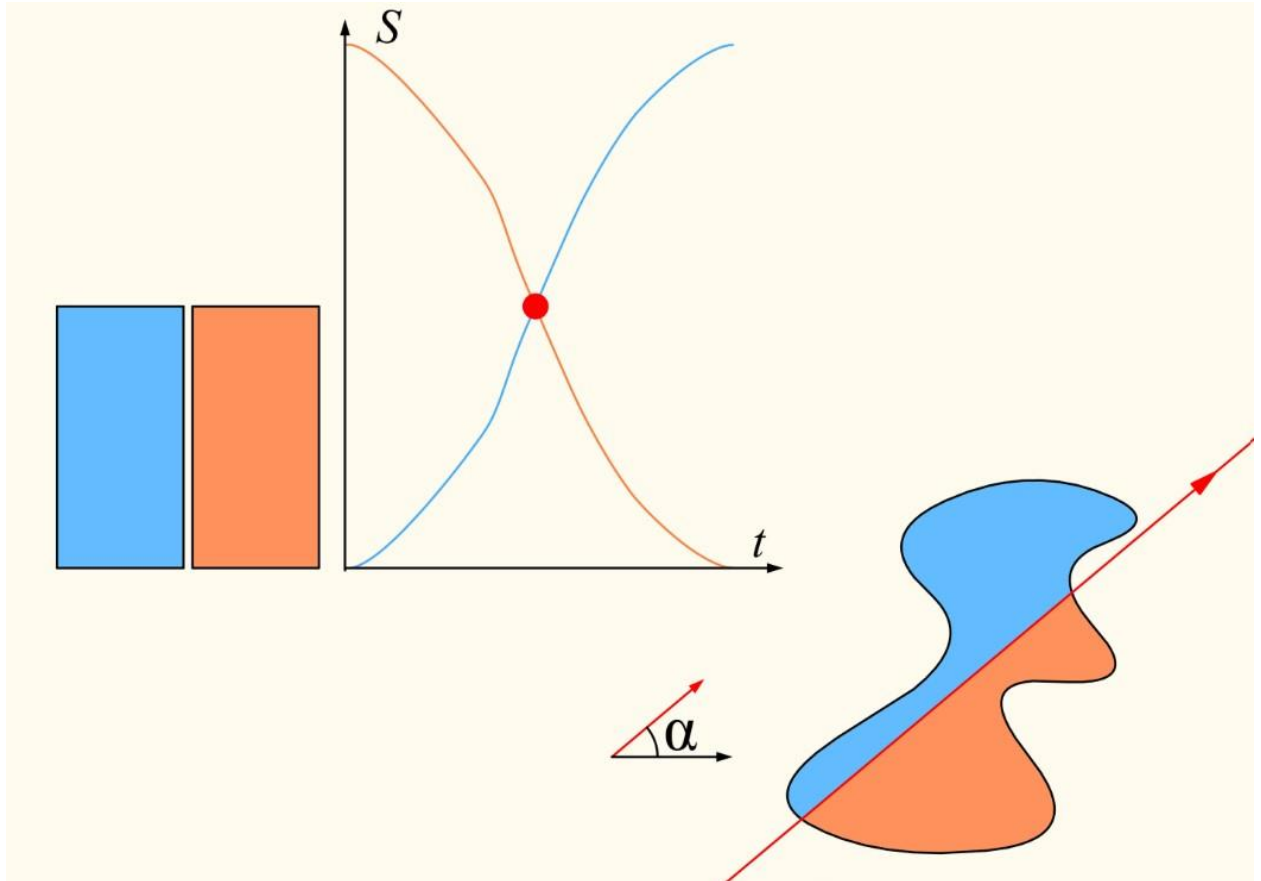




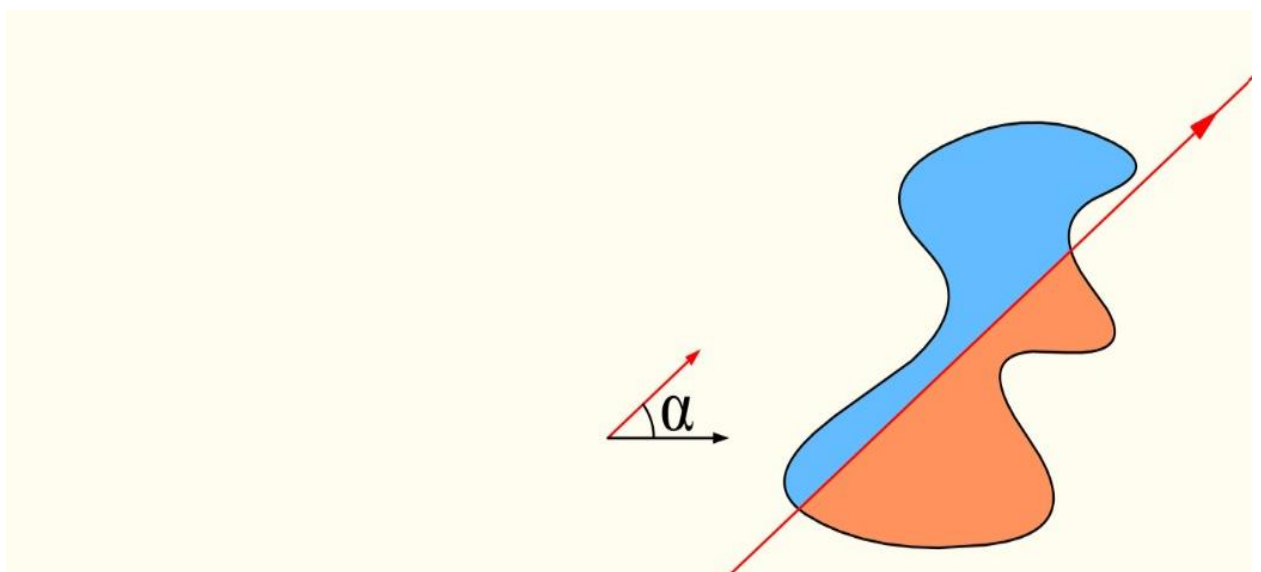
У певний момент увесь складник залишиться ліворуч. Блакитний стовпчик гістограми відповідатиме повній площі складника, а помаранчевий буде нульовим.



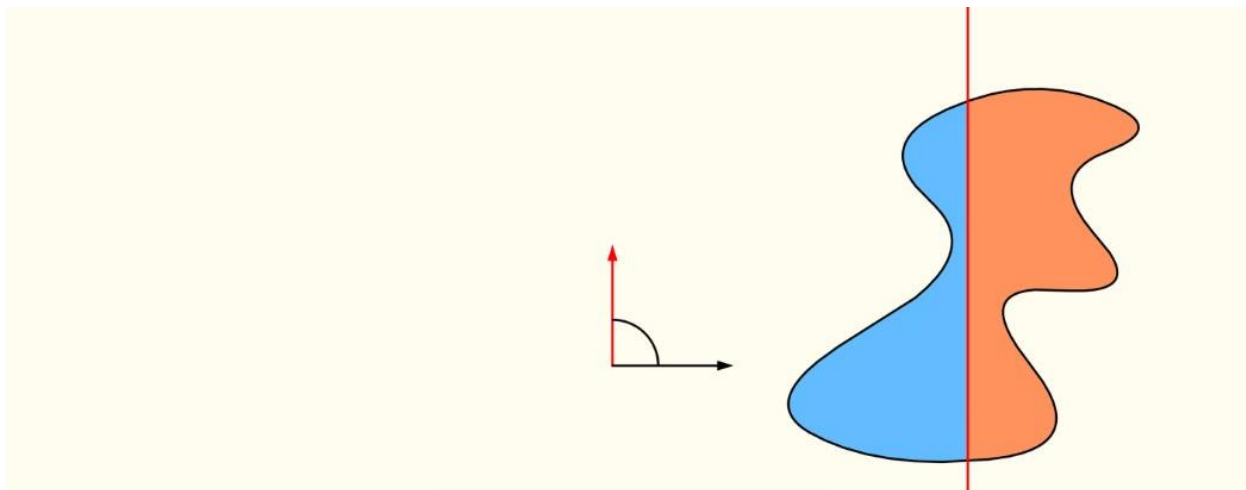
Давайте подивимось на отримані графіки площ праворуч і ліворуч від прямої. Вони неперервні, тому існує точка їх перетину. Вона і відповідає шуканій прямій, що ділить площу складника навпіл і є паралельною обраному напрямку.



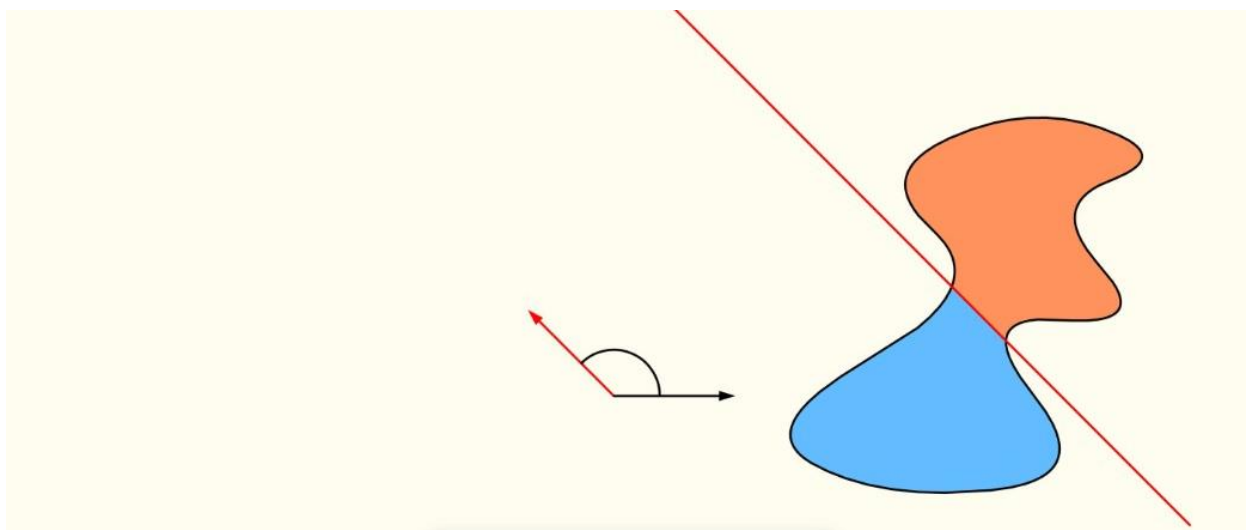
У відповідності до того, що напрямок обирався довільно, пряма, що ділить один складник навпіл, існує в будь-якому напрямку. Наприклад, для нашого кута:



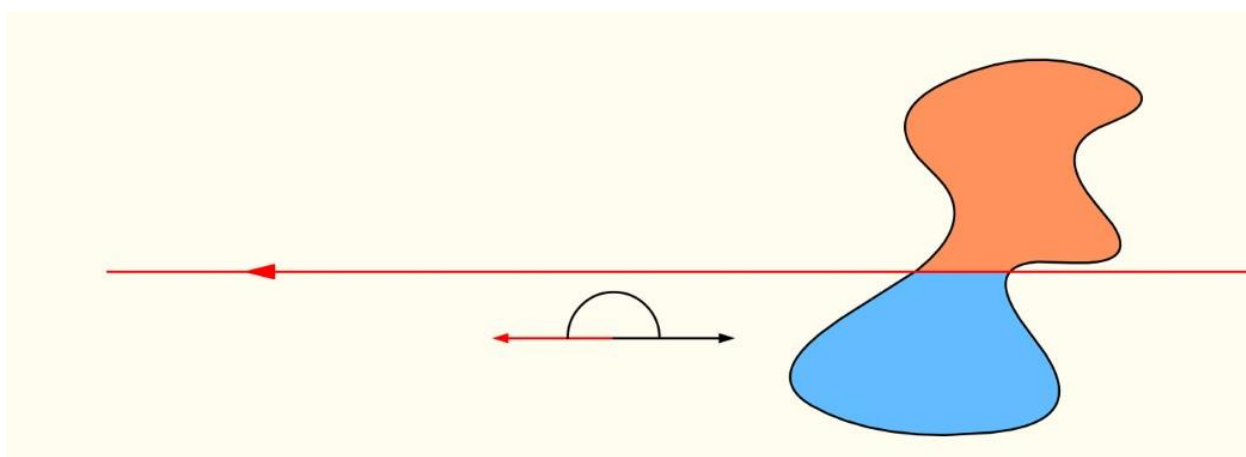
Для іншого кута (90°):



Для іншого довільного кута:

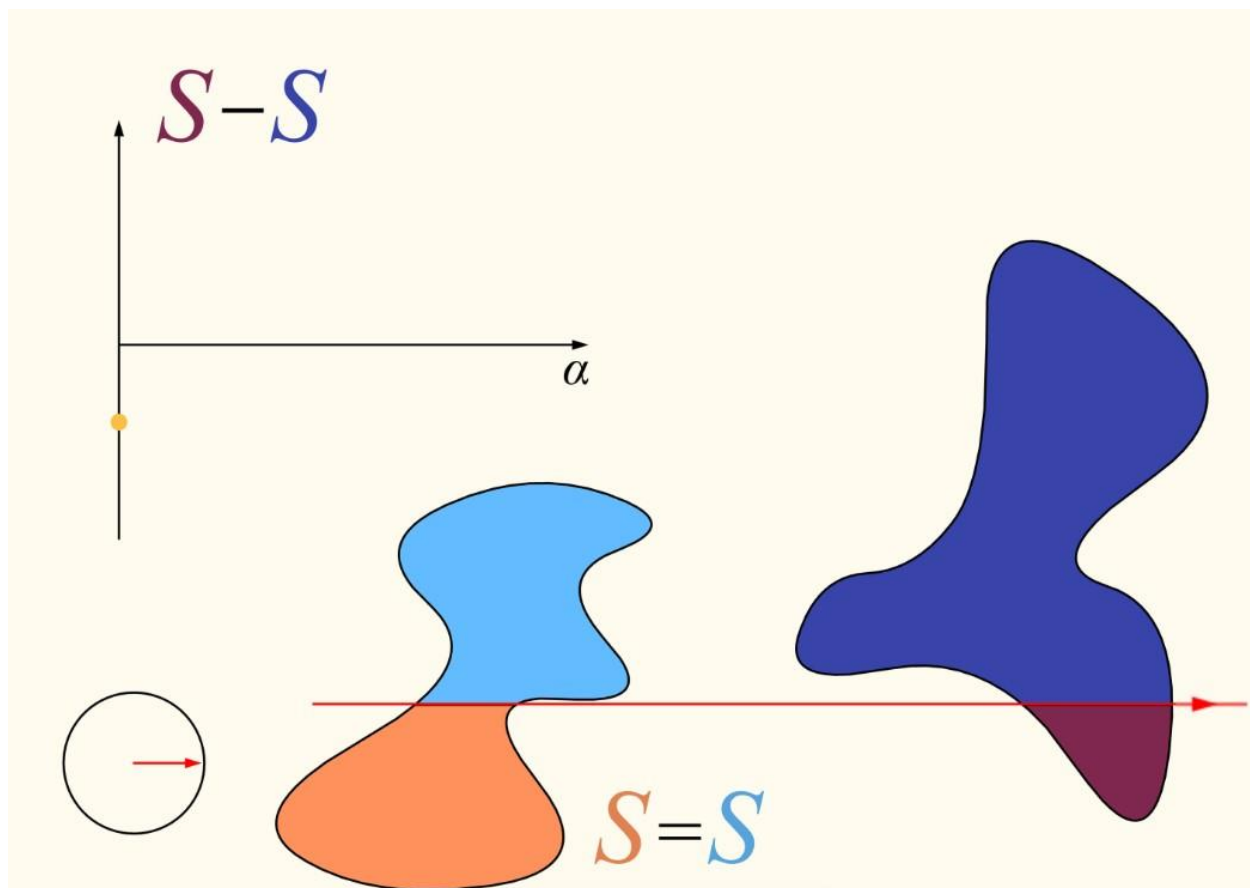


Для розгорнутого кута:

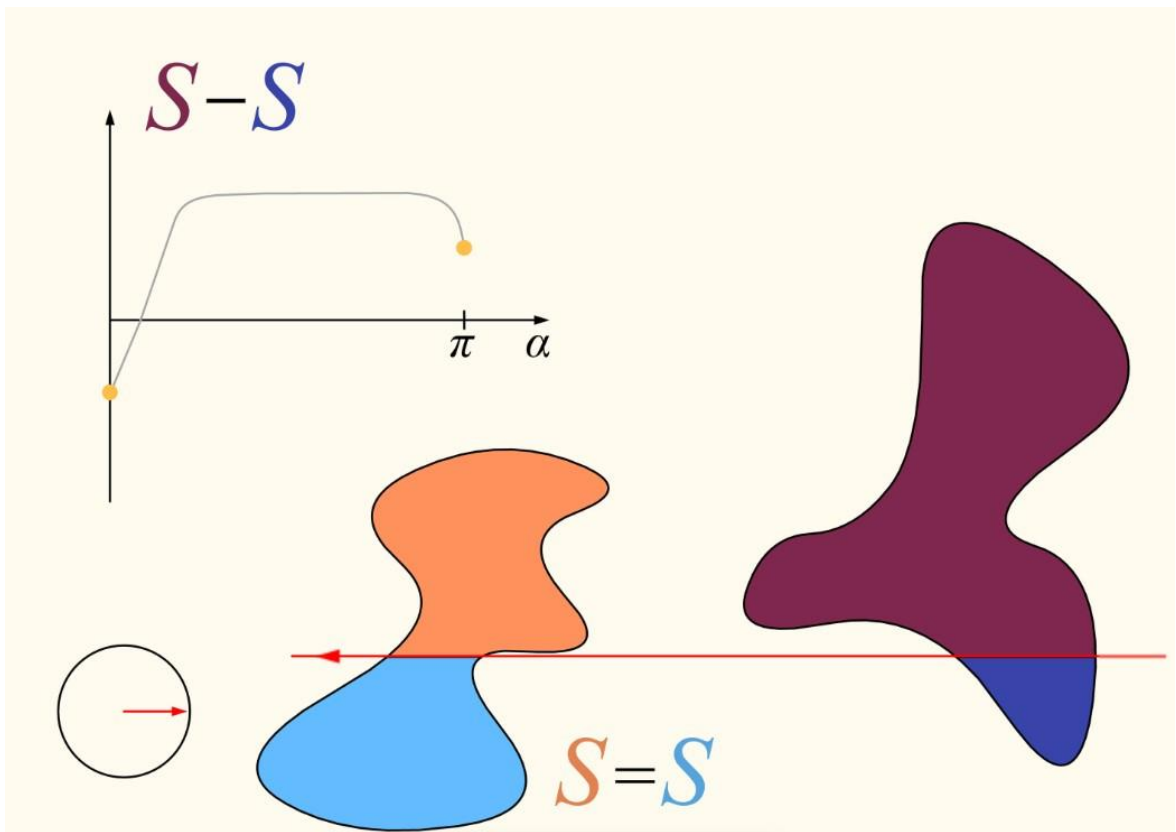


Наголосимо ще раз: у відповідності до того, що напрямок обирався довільно, пряма, що ділить один складник навпіл, існує в будь-якому напрямку.

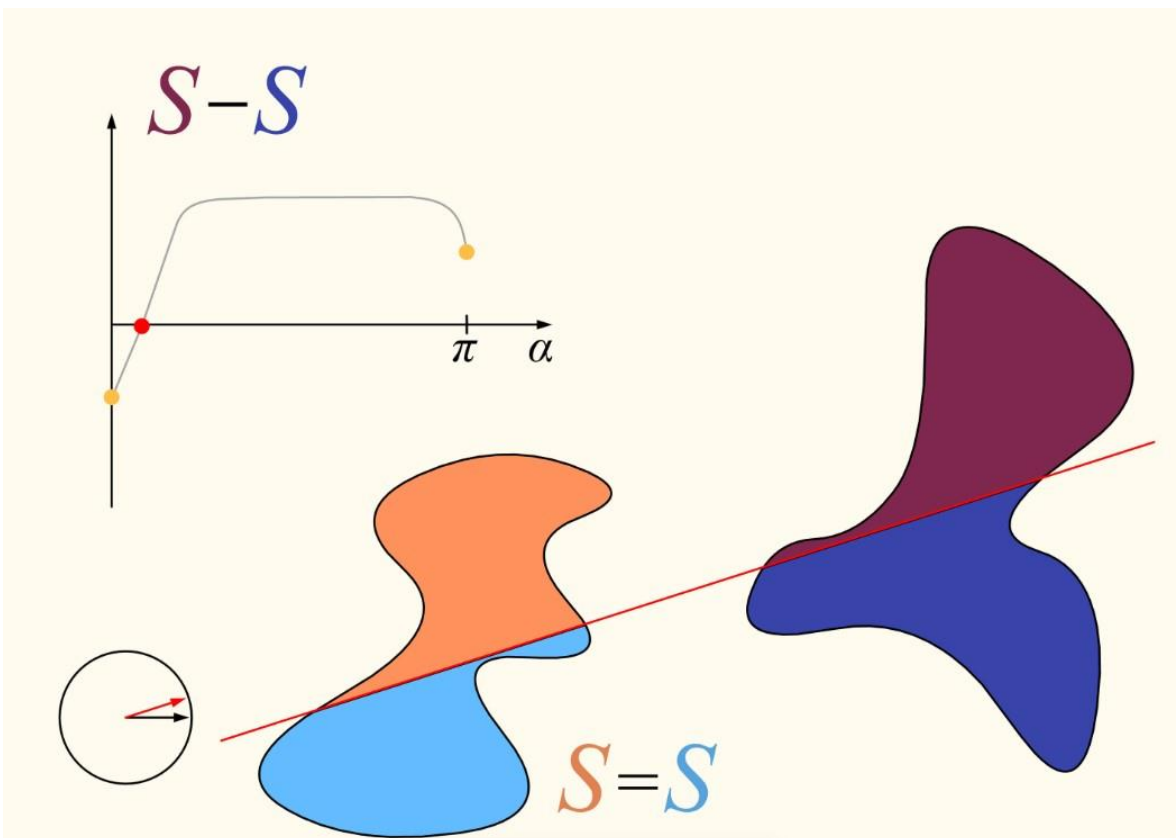
З одним складником розібрались, повернемо до композиції двох складників (про хліб важко буде забути, тому сир я б узяв другим:). Будемо розглядати тільки ті прямі, які ділять перший складник навпіл. Першою розглянемо горизонтальну пряму, спрямовану праворуч (кут 0°). Вона довільним чином поділить другий складник, як показано на рисунку:



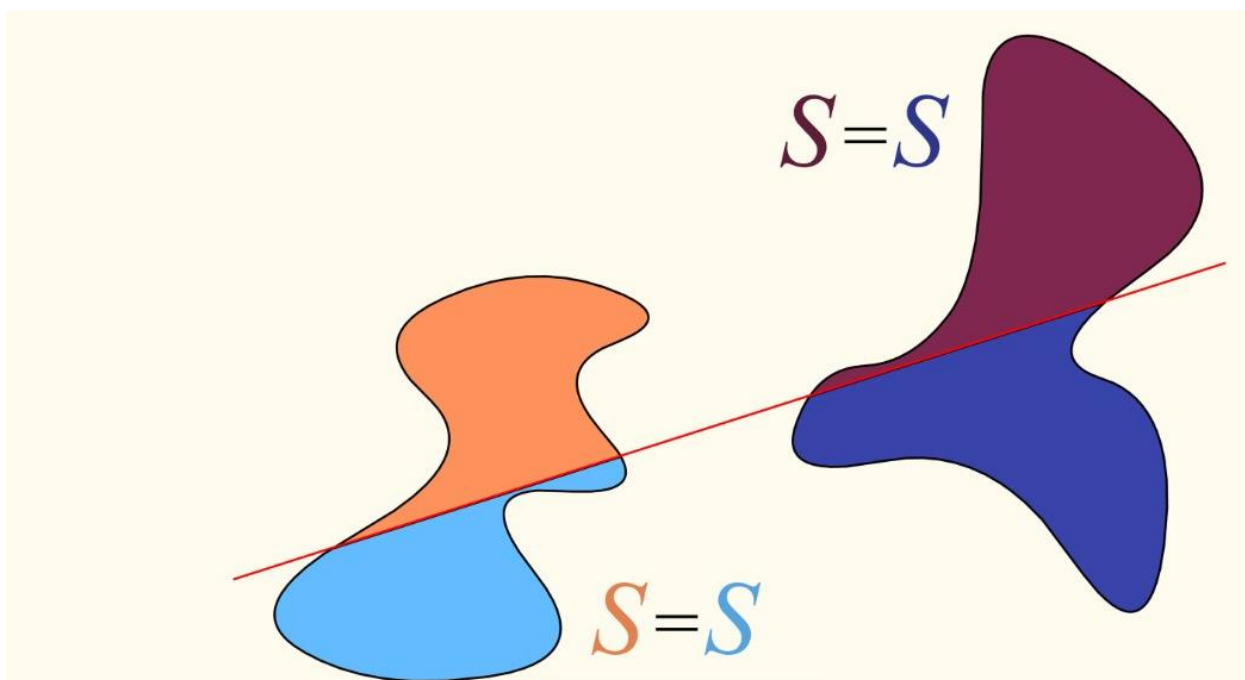
Будемо стежити за графіком різниці площ другого складника – площа праворуч прямої мінус площа ліворуч прямої. Нині ця різниця негативна. Пробіжимося за напрямками від нуля до розгорнутого кута ($180^\circ=\pi$). У цьому кінцевому положенні геометрично пряма збігається з початковою, тільки «право»-«ліво» помінялися місцями.



До того ж, тепер значення аналізованої різниці позитивне. Оскільки різниця змінювалася **неперервно**, то, значить, її графік десь **перетнув нульове значення**. І цьому значенню відповідає пряма, що ділить другий складник рівно навпіл.



Оскільки ми розглядали лише ті прямі, які ділять навпіл перший складник, то, отже, ми знайшли шукану пряму. Вона ділить і перший, і другий складник одночасно навпіл за площею.



Ось так використовується теорема **Больцано-Коші**. На жаль, вона є неконструктивною, бо не може вказати, як саме проходить шукана пряма. Але на площині нами доведено її існування! Теореми на кшталт цієї ще називають **теоремами існування**.

Перейдемо до розгляду тривимірного випадку. Замість двох складників на двовимірній площині, розглянемо три довільні тіла в тривимірному просторі, що довільно розташовані одне відносно одного. Замість площ – об'єми. Виявляється, і в цьому випадку схожим міркуванням, що ми використовували для площини, можна довести подібну теорему існування. **Для будь-яких трьох тіл існує площина, яка кожне з трьох тіл ділить за об'ємом рівно навпіл.**

Щоб життя було смачнішим, розглянемо бутерброд із ковбаси, сиру та хліба – три тіла, які довільно розташовані одне відносно одного. Спробуйте довести твердження вище, що існує площина, яка ділить рівно навпіл і ковбасу, і водночас сир із хлібом! Чекаємо на ваше розв'язання та цікавість у сфері наукових знань!

Як підсумок: теорема **Больцано-Коші**, також відома як **теорема про проміжне значення**, широко застосовується в:

1. **Аналізі неперервності функцій:** для доведення існування коренів у неперервних функціях на відрізках, де функція змінює знак.
2. **Чисельних методах**, зокрема, у методі бісекції (діленні відрізка навпіл) для знаходження коренів рівнянь: за допомогою цієї теореми визначають проміжок, на якому функція набуває нульового значення.
3. **Фізиці та інженерії:** при моделюванні явищ, де можна очікувати неперервність зміни параметрів (наприклад, температури, тиску), і важливо знайти певний проміжок, на якому фізичний параметр приймає задане значення.
4. **Економіці:** у моделюванні неперервних функцій попиту та пропозиції або інших економічних показників для знаходження точок рівноваги.
5. **Математичному моделюванні:** при моделюванні динамічних систем і процесів у різних природничих і технічних науках, коли важливо визначити, чи існує розв'язок у певних інтервалах параметрів.

Отже, теорема **Больцано-Коші**, допомагаючи встановити існування значень функцій на заданих проміжках, є одним із фундаментальних інструментів математичного аналізу, що робить її універсально корисною в різних прикладних галузях.

Нагадуємо, що на кафедрі фізики, математики та методики навчання факультету ФФМКТО БДПУ працює математичний гурток, чекаємо на всіх охочих! Щоб записатись або швидко отримати зворотній зв'язок, натискайте на посилання:

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfe1fEawLDqamSvh8KBRWZybZx_QI6f_s2oiokooZaj0QsGzA/viewform

Також телефонуйте з питаннями, побажаннями та задля обміну думками:

099-501-02-03

098-501-02-03

073-501-02-03

Приєднуйтеся у Zoom

ID: 864 4885 1010

Код доступу: 297 369

Посилання:

<https://us02web.zoom.us/j/86448851010?pwd=ONU4yQwTmlc5r5QDjJFhbsuKjz3a3V>